TD Maple n°7. Suites récurrentes.

Exercice 1 *L'algorithme d'Euclide étendu*

1. Rappeler l'algorithme d'Euclide permettant de calculer pgcd(a,b) par divisions euclidiennes successives.
2. On notera (r_n) la suite des restes et (q_n) la suite des quotients. Donner les formules de récurrence vérifiées par (q_n) et (r_n). (Pour des raisons pratiques, on notera $r_0 = b$ et l'on numérotera les quotients à partir de q_1).
3. On note maintenant (u_n) et (v_n) les suites récurrentes définies par

$$(u_n)\ :\ \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+2} = u_n - q_{n+2}u_{n+1} \end{cases} \quad \text{et} \quad (v_n)\ :\ \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+2} = v_n - q_{n+2}v_{n+1} \end{cases}$$

   (a) Vérifier que $a.u_0 + b.v_0 = r_0$ et $a.u_1 + b.v_1 = r_1$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a.u_n + b.v_n = r_n, \qquad a.u_{n+1} + b.v_{n+1} = r_{n+1}.$$

   (c) Que valent u_{n-1} et v_{n-1} quand $r_n = 0$?
   (d) Programmer l'algorithme d'Euclide étendu.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soit $f\ :\ \ x \mapsto x - e^{-x}$. L'objectif de cet exercice est de comparer deux suites récurrentes permettant d'approximer la solution de l'équation

$$f(x) = 0$$

Dans tout l'exercice, on travaillera avec `Digits :=100`.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. A l'aides des fonctions *Maple*, trouver une valeur approchée de α. (On prendra cette valeur pour référence dans la suite de l'exercice).

3. *La methode du point fixe.*
   On note $g = id - f$. Programmer la suite récurrente (x_n) définie par :

$$(x_n)\ :\ \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = g(x_n),\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

4. *La methode de Newton.*
   Programmer la suite récurrente (y_n) définie par :

$$(y_n) \; : \left\{ \begin{array}{l} y_0 = 0 \\ y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}, \; n \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

5. *Comparaison des deux methodes.*
   (a) Comparer les suites $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $e_n = x_n - \alpha$ et $\varepsilon_n = y_n - \alpha$.
   (b) Comparer les vitesses de convergence des deux methodes. (i.e. le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre une précision donnée.)

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆