TD semaine 1. Normes.

Exercice 1 L'objectif de cet exercice est d'étudier les suites du type $(z^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1. Étudier cette suite pour $z = \dfrac{1+i}{2}$.
2. Étudier cette suite pour $z = 1 + i\sqrt{3}$.
3. Étudier cette suite pour $z = \dfrac{1+i\sqrt{2}}{2}$.
4. Donner un comportement général en fonction de $|z|$.

****

Exercice 2 Soient (x_n) et (y_n) deux suite réelles définies par

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 \in \mathbb{R} \\ x_{n+1} = -\dfrac{x_n + y_n}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \quad , \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} y_0 \in \mathbb{R} \\ y_{n+1} = \dfrac{x_n - y_n}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

1. Montrer que la suite complexe (z_n) définie par $z_n = x_n + iy_n$ est géométrique. En déduire x_n et y_n en fonction de n.
2. Les suite (x_n) et (y_n) sont elles convergentes ?

****

Exercice 3 Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$. On définit également l'application N_1 sur E par :

$$N_1(f) = \int_0^1 e^t |f(t)| dt.$$

1. Montrer que N_1 est une norme sur E.
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de E définie par

$$f_n(x) = \left\{\begin{array}{l} 1 - nx \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1/n \\ 0 \text{ sinon.} \end{array}\right.$$

   Étudier cette suite pour les normes $\|.\|_\infty$ et N_1. Que peut-on en conclure ?

****

Exercice 4 Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Rappelons que l'application $\|.\|_\infty : f \mapsto \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ est une norme sur E.

1. Montrer que l'application $N_1 : f \mapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ est une norme sur E. Est-elle équivalente à $\|.\|_\infty$? (On pourra étudier la suite de fonctions définie par $f(x) = x^n$.)
2. Montrer que l'application $N_2 : f \mapsto |f(0)| + \|f'\|_\infty$ est une norme sur E, équivalente à N_1.

****

Exercice 5 Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé des suites réelles bornées $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_0 = 0$. On définit

$$N_\infty(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|, \quad \text{et} \quad N(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|.$$

1. Montrer que N_∞ et N sont des normes sur E.
2. Montrer que pour tout $u \in E$, on a

$$N(u) \leqslant 2N_\infty(u).$$

3. Montrer qu'il existe une suite $u \in E\backslash\{0\}$ telle que $N(u) = 2N_\infty(u)$ (i.e. la constante obtenue à la question précédente est optimale).
4. Montrer que les normes N et N_∞ ne sont pas équivalentes.