TD 9. Séries de Fourier.

Exercice 1 Soit f la fonction impaire, 2π-périodique vérifiant

$$\forall x \in [0,\pi], \quad f(t) = t(\pi - t).$$

1. Régularité de f :
   (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer le développement en série de Fourier de f.
3. En déduire la somme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.
4. Calculer $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^6}$ puis $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^6}$

****

Exercice 2 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables qui sont solutions de l'équation différentielle

$$y'' + y' + y = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(nx)}{n^3}.$$

(On pourra commencer par chercher une solution particulière sous la forme d'une fonction 2π-périodique, développée en série de Fourier...)

****

Exercice 3 Soit

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} y^2 \sin\left(\dfrac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{sur la droite } \{y=0\} \end{cases} \end{array}$$

Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
Rappel : f est continue en un point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} |f(x,y) - f(x_0,y_0)| = 0.$$

****

Exercice 4 Soit

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^6}{x^8 + (y-x^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
2. Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$. (On pourra utiliser la parabole $y = x^2$).

****

Exercice 5 Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

****

Exercice 6 On introduit la fonction $f(x,y) = 4x^2 + y^2 - 4yx + 4x - 2y - 8$

1. Calculer les dérivées d'ordre 1 et 2 de f.
2. Déterminer tous les couples $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ puis représenter graphiquement cet ensemble

****

Exercice 7 On pose $f(x,y) = 4x^2 - 2xy + 7y^2 + 4$

1. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
2. Démontrer que le système $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$ possède une unique solution (x_0, y_0) puis calculer $f(x_0, y_0)$.
3. Etudier le signe du trinôme $4X^2 - 2X + 7$.
4. En remarquant que
$$4x^2 - 2xy + 7y^2 = y^2(4(\frac{x}{y})^2 - 2\frac{x}{y} + 7)$$
lorsque y n'est pas nul, montrer que $f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Interpréter ce résultat.

****

Exercice 8 On considère f la fonction définie sur l'ouvert $]0,1[\times]0,1[$ de $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = (1-x)^n + (1-y)^n + (x+y)^n$$

1. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
2. Démontrer que le système $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$ possède une unique solution (x_0, y_0)
3. Calculer $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0), \quad s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0), \quad t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$ et $r^2 - st$.