

TD 2. Analyse dans des EVN.

Exercice 1 Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on note

$$N(x, y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{x + ty}{1 + t + t^2} \right|.$$

Montrer que N définit une norme sur \mathbb{R}^2 et tracer la boule unité fermée

$$B'_N(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / N(x, y) \leq 1\}.$$

Exercice 2 Représenter graphiquement les sous ensembles de \mathbb{R}^2 suivants, en précisant pour chacun s'ils sont ouverts, fermés.

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -1 < x < 1\}$.
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1\}$.
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| < 1, |y| \leq 1\}$.
4. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 4\}$.