Université Toulouse 2 le Mirail — Année universitaire 2006/2007

L2 MASS. Analyse S4

TD 3. Topologie dans des EVN.

Exercice 1 Soit E un espace vectoriel.

1. Soit $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille d'ouverts de E.
   (a) Montrer que $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k$ est encore un ouvert.
   (b) Montrer que quelque soit la famille d'indices $k_1, \ldots, k_s$, l'union $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{s} U_{k_i}$ est encore un ouvert.
2. Soit $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de fermés de E.
   (a) Montrer que $\displaystyle\bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k$ est encore un fermé.
   (b) Montrer que quelque soit la famille d'indices $k_1, \ldots, k_s$, l'union $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{s} F_{k_i}$ est encore un fermé.

****

Exercice 2 Donner une écriture simple des ensembles suivants :

$$I = \bigcup_{n>1} \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right], \quad J = \bigcap_{i>0, j>0} \left]-\frac{1}{i}, 1 + \frac{1}{j}\right[.$$

****

Exercice 3 Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Pour tous sous-ensembles A et B de E, on définit la distance entre A et B comme

$$d(A, B) = \inf_{x\in A, y\in B} \|x - y\|.$$

1. Montrer que si $d(A, B) > 0$, il existe deux ouverts disjoints U et V de E tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.
2. Soit F un sous ensemble fermé de E et soit $x \in E$. Montrer que $d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in F$.

****

Exercice 4
1. Montrer à l'aide de la caractérisation séquentielle des fermés que les ensemble suivants sont fermé dans les evn donnés.

(a) L'ensemble des fonctions continues de $[0,1] \to \mathbb{R}$ dans l'ensemble des applications bornées de $[0,1] \to \mathbb{R}$, muni de la norme $\|.\|_\infty$.

(b) L'ensemble des matrices $n \times n$ diagonales dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer à l'aide de la caractérisation séquentielle des fermés que les ensemble suivants ne sont pas fermé dans les evn donnés.

   (a) L'intervalle $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$.

   (b) L'ensemble des matrices $n \times n$ inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

****

Exercice 5 Soit E un espace vectoriel et soit F un fermé de E. Soit également $r > 0$. Montrer que l'ensemble

$$F' = \bigcup_{x \in F} B'(x,r)$$

est encore un fermé.

Ind : On pourra commencer par montrer que si (y_n) est une suite d'éléments de F' qui converge, il existe une suite (x_n) d'éléments de F qui converge aussi telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n \in B'(x_n, r).$$