Université Toulouse 2 le Mirail
L2 MASS. Analyse S4

Année universitaire 2006/2007

# TD 4. Topologie et suites dans des EVN.

---

**Exercice 1** 1. Préliminaire :

   (a) Rappeler la définition de la borne inf.

   (b) Montrer que si $I$ est une partie de $\mathbb{R}$ minorée (i.e. $\inf I$ existe), il existe une suite $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to \inf I$.

2. Soit $(E, \|.\|)$ un env. On a montré que si $A$ et $B$ étaient deux sous-ensembles de $E$, on pouvait définir la distance
$$d(A,B) = \inf_{x \in A, y \in B} \|x - y\|$$
et que si $d(A,B) > 0$, alors il existe deux ouverts $U$ et $V$ de $E$ tels que
$$\begin{cases} A \subset U,\ B \subset V \\ U \cap B = \emptyset. \end{cases}$$
D'autre part, on a vu que si $F$ était un sous ensemble fermé de $E$, alors pour tout $x \in E$, on a
$$d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in F.$$
A l'aide de la caractérisation séquentielle des fermés, montrer que si $F$ et $G$ sont deux fermés bornés disjoints de $E$, alors il existe deux ouverts $U$ et $V$ tels que $F \subset U$, $G \subset G$ et $U \cap V = \emptyset$. (Ind : on pourra construire des suites convergentes $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ et $(y_n) \in G^{\mathbb{N}}$ telles que $\|x_n - y_n\| \to 0$.)

*******************

**Exercice 2** Soit $E = (\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$. On considère une suite $(f_n)$ d'éléments de $E$ qui converge (pour la norme $\|.\|_\infty$) et l'on note $f$ sa limite. On considère également une suite $(x_n)$ d'éléments de $[0,1]$ qui converge,et l'on note $x$ sa limite.

1. Montrer que $f \in E$ et $x \in [0,1]$.
2. Montrer que la suite numérique $(f_n(x_n))$ converge vers $f(x)$.
3. Montrer que ce résultat est faux s'il n'y a pas convergence uniforme. On pourra par exemple utiliser la suite $(f_n)$, définie par
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) = \begin{cases} 1 - x/n \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1/n \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

*******************

**Exercice 3** Soit $(E, \|.\|)$ un evn et soit $A \subset E$. On rappelle qu'un point $a \in E$ est dit*adhérent* à $A$ si toute boule ouverte centrée en $a$ rencontre $A$. On peut alors définir *l'adhérence* $\overline{A}$ *de* $A$ comme étant l'ensemble des points adhérents à $A$.

1. Donner une caractérisation séquentielle de l'adhérence.
2. Montrer que $\overline{A}$ est un fermé qui contient $A$.
3. Montrer que tout fermé qui contient $A$ contient $\overline{A}$.

   On a donc une caractérisation de l'adhérence :

$$\overline{A} = \bigcap_{F \supset A, \text{fermé}} F.$$

4. Déterminer l'adhérence d'une boule ouverte $B(x, r)$. (Pour $y \in B'(x, r)$, on pourra considérer la suite
   $(y_n) \, : \, y_n = x + \dfrac{n}{n+1}(y - x)$).
5. Déterminer l'adhérence de l'ensemble

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, / \, xy > 1\}.$$