Université Toulouse 2 le Mirail — Année universitaire 2006/2007

L2 MASS. Analyse S4

TD 5. Séries de fonctions.

Exercice 1 Révision sur les séries numériques

1. Soit $a > 0$. On note
$$u_n(a) = \frac{a^n}{1+a^{2n}}.$$
Étudier la convergence de la série $\sum u_n(a)$ selon la valeur de a
2. Soit
$$u_k(x) = \frac{x^k}{(1-x^k)(1-x^{k+1})}.$$
   (a) Étudier la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 1} u_k(x)$ selon les valeurs de x.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$. On pourra commencer par montrer que pour tout $k \geqslant 1$, on a
$$u_k(x) = \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{1-x^{k+1}} - \frac{1}{1-x^k}\right)$$

****

Exercice 2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note
$$u_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^2}.$$

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout n$\in \mathbb{N}$, étudier la fonction u_n sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que pour tout $a > 0$, la série $\sum u_n$ converge normalement sur $]-\infty, -a,] \cup [a, +\infty[$.
4. A-t-on convergence normale sur $\mathbb{R}$?

****

Exercice 3 Soit (f_n) la suite de fonctions définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}.$$

1. Étudier les convergences simples et normales de la séries $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que la fonction $f = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Étudier la convergence normale de la série $\sum f_n'$ sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner f' sous la forme d'une série.

****

Exercice 4 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$, on note

$$f_n(x) = e^{-\sqrt{n}x}.$$

1. Montrer la convergence simple de la série $\sum f_n$ sur $]0, +\infty[$. On note f sa somme.
2. A-t-on convergence normale de la série $\sum f_n$ sur $]0, +\infty[$.
3. Soit $a > 0$. Montrer que la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.
4. En déduire que f est continue sur $]0, +\infty[$.

****

Exercice 5 Pour tout $(n, x) \in \mathbb{N}\times]-1, 1[$, on note

$$f_n(x) = x^n.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur l'intervalle $]-1, 1[$. Exprimer sa somme f à l'aide des fonctions usuelles.
2. Montrer que la série $\sum f_n$ converge normalement sur tout intervalle de la forme $[-a, a]$, pour $a \in]0, 1[$.
3. En déduire que f est continue sur $]-1, 1[$.
4. Montrer que la série $\sum f_n'$ est normalement convergente sur $[-a, a]$. En déduire que f est dérivable sur $]-1, 1[$, et exprimer f' sous la forme d'une série.
5. Exprimer la fonction $[x \to \frac{1}{(1-x)^2}]$ sous la forme d'une série, puis exprimer la série $\sum nx^n$, $x \in]-1, 1[$ à l'aide des fonctions usuelles.
6. Exprimer la série $\sum x^n/n$, $x \in]-1, 1[$ à l'aide des fonctions usuelles.

****

Exercice 6 Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x-1}$.

1. Montrer que f est intégrable en 0.
2. Pour $x \in]0, 1[$, calculer
$$I(x) = \int_0^x \frac{\ln t}{t-1} dt.$$
3. En déduire que f est intégrable en 1 et que
$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt = \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^2}.$$

****

Exercice 7 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2+1}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de la somme $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.
2. Montrer que f est continue sur son domaine de définition.
3. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

****

Exercice 8 On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(t) = nte^{-nt^2}$.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, la série $\sum e^{-nt^2}$ converge et calculer sa somme.
2. Soit $a > 0$. Montrer que la série $\sum f_n$ converge normalement sur le domaine $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$.
3. En déduire une expression de $\sum_{n\geqslant 1} f_n(t)$ pour tout $t \neq 0$.

****

Exercice 9 Soit (u_n) la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par

$$u_n(x) = \frac{x}{n(n+x)}.$$

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ et normalement sur tout intervalle de la forme $[0, A]$, $A > 0$.
2. On note U sa somme. Montrer que U est continue sur $\mathbb{R}^+$.
3. On note maintenant
$$a_n = \int_0^1 u_n(t)dt.$$
   (a) Montrer que la série $\sum a_n$ est convergente.
   (b) Calculer a_n.
   (c) En déduire que la suite (b_n) définie par
   $$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n+1)$$
   est convergente.