

TD 6. Rayons de convergence.

Exercice 1 Rayons de convergence

1. Calculer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

$$a) \sum_{n \geq 0} (2x)^n, \quad b) \sum_{n \geq 1} n^2 x^n, \quad c) \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 x^n}{3^n + n}, \quad d) \sum_{n \geq 0} \cos(n)x^n, \quad e) \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}, \quad f) \sum_{n \geq 0} n! x^n$$

2. Calculer le rayon de convergence des séries suivantes

$$a) \sum_{n \geq 0} \frac{n^n}{n!} x^n, \quad b) \sum_{n \geq 1} \frac{2^n n^n}{(2n)!} x^n, \quad c) \sum_{n \geq 0} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1} x^n \quad d) \sum_{n \geq 0} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) x^n \quad e) \sum_{n \geq 0} n e^{-n} x^{3n},$$

$$f) \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{n^n}{n!} x^{2n+1}, \quad g) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} x^{n!}.$$

Exercice 2 : La série géométrique et ses dérivées

1. Calculer le rayon de convergence et la somme de chacune des séries suivantes :

$$\sum_{n \geq 0} x^n, \quad \sum_{n \geq 1} n x^n, \quad \sum_{n \geq 2} n(n-1)x^n$$

2. En déduire le rayon de convergence et la somme de chacune des séries suivantes :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{3^n x^n}{2^{n+1}}, \quad \sum_{n \geq 0} (n^2 + n + 1)x^n, \quad \sum_{n \geq 0} \frac{n}{2^{2n}} x^{2n+1}$$

Exercice 3 : Le développement d'exponentielle et ses conséquences

On considère la série entière

$$S(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}.$$

1. Calculer le rayon de convergence de la série S .
2. En déduire que la fonction S est dérivable sur \mathbb{R} , et montrer que $S' = S$.
3. En déduire une expression de S à l'aide des fonctions usuelles.
4. En déduire le développement en séries entières des fonctions cosh et sinh.

Exercice 4 Donner le rayon de convergence de chacune des séries suivantes, puis en s'aidant des DSE des fonctions classiques, donner les fonctions sommes correspondantes :

$$a) \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n(n+1)}, \quad b) \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{x^{4n-1}}{4n}, \quad c) \sum_{n \geq 1} \frac{nx^n}{(n-1)!}, \quad d) \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + n + 1}{n!} x^n.$$

Exercice 5 Exprimer chacune des fonctions suivantes à l'aide d'une série entière, en précisant à chaque fois l'intervalle de convergence.

$$f(x) = \frac{1}{3-2x}, \quad g(x) = \log(2x+3), \quad h(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad j(x) = \arctan(x).$$