Université Toulouse 2 le Mirail
L2 MASS. Analyse S4

Année universitaire 2006/2007

TD 7. Séries entières.

1 Calcul de sommes

Exercice 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ et l'on note f la somme $\sum f_n$.

1. Calculer le rayon de convergence de la série $\sum f_n$.
2. Montrer que f est continue sur $[-R, R]$ et dérivable sur $]-R, R[$.
3. Donner une expression simple de f' puis de f sur $]-R, R[$.
4. En déduire l'égalité
$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} = 2\log 2 - 1.$$

****

Exercice 2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = n(-2)^n$ et $b_n = (-2)^n$.

1. Montrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ ont le même rayon de convergence R et le calculer.
2. Pour tout $x \in]-R, R[$, on note $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Donner une expression simple de g sur $]-R, R[$.
3. Pour tout $x \in]-R, R[$, on note $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Déterminer la primitive de $f + g$ qui s'annule en 0 sous la forme d'une série. On note h cette somme.
4. Exprimer h sous la forme d'une fraction rationnelle.
5. En déduire une expression de f sous la forme d'une fraction rationnelle.

****

Exercice 3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{4n^2 - 1}$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geqslant 1} f_n(x)$. La série converge-t-elle pour $x = R$, $x = -R$

2. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |x| < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = x \arctan x$$

3. En déduire la somme $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

****

Exercice 4 On considère la série entiere $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ où $f_n(x) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^{n+1}$. (On notera f sa somme).

1. Calculer son rayon de convergence.
2. Etablir l'égalité
$$\frac{2}{n+1}\binom{2n}{n} = 4\binom{2n}{n} - \binom{2n+2}{n+1}.$$
En déduire une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par f.
3. Résoudre cette équation pour obtenir une expression de $f(x)$ à l'interieur de l'intervalle de convergence.

****

2 Développements en séries entières

Exercice 5 Développer les fonctions suivantes en séries entières au voisinage de 0. Préciser dans chaque cas le rayon de convergence de la série obtenue.

$$a)\, f(x) = \log\left(\frac{1+2x^2}{1-x^2}\right), \quad b)\, h(x) = e^x \cos x, \quad c)\, k(x) = \int_0^x \frac{\arctan(t^2)}{t} dt.$$

****

Exercice 6 Soit $f(x) = \dfrac{5x^3 - 2x^2 + x}{(1-2x)(1-3x)(1-x)^2}$.

1. Déterminer les réels a, b, c et d tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1/3, 1/2, 1\}$, on ait
$$f(x) = \frac{a}{1-3x} + \frac{b}{1-2x} + \frac{c}{1-x} + \frac{d}{(1-x)^2}.$$
2. En déduire le développement en séries entières de f au voisinage de 0. On précisera le rayon de convergence de la série obtenue, ainsi que le domaine de validité de ce développement.