Université Toulouse 2 le Mirail | Année universitaire 2006/2007

L2 MASS. Analyse S4

TD 8. Séries entières et équations différentielles.

Exercice 1 1. On considère le problème différentiel suivant :

$$(S)\ :\ \begin{cases} (E) & :\ xy'' + 2y' + xy = 0 \\ (CI) & :\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(a) Montrer qu'il existe une unique solution de (S) développable en série entière autour de 0. (On pourra chercher y sous la forme $y(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et déterminer des conditions sur la suite (a_n).

(b) Quel est l'intervalle de définition de y ?

(c) Calculer y.

2. Mêmes questions avec le système

$$(S')\ :\ \begin{cases} x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1 \\ y(0) = 1/2,\ \ y'(0) = 0 \end{cases}$$

****

Exercice 2 Soit

$$f\ :\ x \to \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1. Montrer que f est solution d'une équation différentielle (E) à déterminer.
2. En déduire un développement de f en série entière. (On pourra chercher une solution de (E) sous la forme d'une série entière, puis identifier à f).
3. Déterminer le développement en série entière de $g\ :\ x \to (\arcsin(x))^2$.

****

Exercice 3 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = a_2 = 1 \\ a_{n+1} = a_n - \dfrac{a_{n-2}}{2(n+1)} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (a_n) est décroissante et que la suite (na_n) est croissante.
2. En déduire le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$.
3. Soit f la somme de la série entière $\sum a_n x^n$. Montrer que f est solution d'un équation différentielle à déterminer.
4. En déduire une expression de f à l'aide des fonctions usuelles.