Université Toulouse 2 le Mirail Année universitaire 2006/2007
L2 MASS. Analyse S4

TD 9. Séries de Fourier.

Exercice 1 Rappels. Soit f une fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que si f est impaire, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$.
2. Montrer que si f est une fonction paire, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{a} f(t)\,dt$.
3. Montrer que si f est T-périodique, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\displaystyle\int_{a}^{a+T} f(t)\,dt = \int_{0}^{T} f(t)\,dt$.

****

Exercice 2 Soit f la fonction 2π-périodique, telle que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in [0,\pi] \\ -x & \text{si} \quad x \in]-\pi, 0[\end{cases}$$

1. Représenter f.
2. Déterminer le développement en série de Fourier S de f.
3. En déduire $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ puis $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$.

****

Exercice 3 Soit

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & |\sin(x)| \end{array}$$

Déterminer le développement en série de Fourier de f.