TD n°2. Familles génératrices, familles libres.

1 Familles génératrices

Exercice 1 On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

1. Écrire le vecteur $\overrightarrow{v} = (1, -2, 5)$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{e_1} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{e_2} = (1, 2, 3)$ et $\overrightarrow{e_3} = (2, -1, 1)$.
2. Pour quelle valeur de k le vecteur $\overrightarrow{u} = (1, -2, k)$ est-il une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v} = (3, 0, 2)$ et $\overrightarrow{w} = (2, -1, -5)$?

****

Exercice 2 Écrire la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

****

Exercice 3 Montrer que tout vecteur $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u_1} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{u_2} = (1, 1, 0)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$.

****

2 Familles libres

Exercice 4 On considère les 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ $\overrightarrow{u_1} = (1, 2, 1)$, $\overrightarrow{u_2} = (2, 1, 3)$ et $\overrightarrow{u_3} = (1, 1, 2)$

1. Ces vecteurs sont-ils linéairement indépendants ?
2. Écrire le vecteur $\overrightarrow{v} = (6, 7, 8)$ dans la base $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$

****

Exercice 5 On considère le sous ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x + 3y - z = 0\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{P}$ est un SEV de $\mathbb{R}^3$.
2. (a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u_1} = (1, 0, 2)$ et $\overrightarrow{u_2} = (0, 1, 3)$ forment une famille libre de $\mathcal{P}$.
   (b) Montrer que tout vecteur de $\mathcal{P}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.
   (c) Que représente la famille $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ pour le SEV $\mathcal{P}$.
3. Quelles sont les coordonnées de tout vecteur $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$ <u>de $\mathcal{P}$</u> dans la base $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$?

****