

Trinôme du second degré.

Un trinôme du second degré est une expression du type

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

où a , b et c sont des nombres connus, que l'on appelle les coefficients.

On appelle racine de P tout nombre x tel que $P(x) = 0$.

Cette fiche résume la méthode permettant de déterminer si un trinôme P donné possède ou non des racines et permettant de calculer ces racines le cas échéant. On verra également comment la recherche des racines nous permet de factoriser P , et on donnera une interprétation graphique des racines et des coefficients.

1 Racines et factorisation

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme donné. Selon les coefficients a, b, c , trois choses peuvent se produire :

1. Le trinôme possède deux racines x_1 et x_2 .
(C'est la cas par exemple du trinôme $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$.)
2. Le trinôme possède une seule racine x_0 .
(C'est la cas par exemple du trinôme $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$.)
3. Le trinôme ne possède pas de racine.
(C'est la cas par exemple du trinôme $x^2 + 1$.)

Pour savoir à quelle catégorie appartient notre trinôme P , on calcule son discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

C'est le signe de Δ qui nous indique dans quelle catégorie se trouve notre trinôme P . Précisément,

1. Si $\Delta > 0$, alors P possède deux racines x_1 et x_2 . Elles sont données par la formule

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

D'autre part, le trinôme P se factorise sous la forme

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

2. Si $\Delta = 0$, alors P possède une seule racine x_0 . Elle est donnée par la formule

$$x_0 = \frac{-b}{2a}.$$

D'autre part, le trinôme P se factorise sous la forme

$$P(x) = a(x - x_0)^2.$$

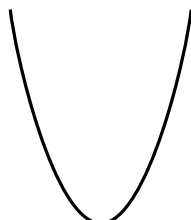
3. Si $\Delta < 0$, alors P n'a pas de racine et il ne se factorise pas.

2 Aspects graphiques

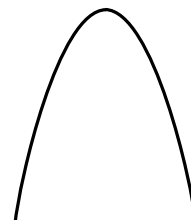
Comme toute fonction, un trinôme du second degré peut être représenté par une courbe. Les coefficients a, b, c et le discriminant Δ ont une interprétation graphique qui nous permet de se faire une idée rapide de l'allure de cette courbe.

Tout d'abords, tous les trinômes sont représentés par des paraboles. Il nous reste à savoir dans quel sens et à quel niveau on doit la placer dans le repère. Or,

Orientation. Le signe de a qui nous donne le sens de la parabole :

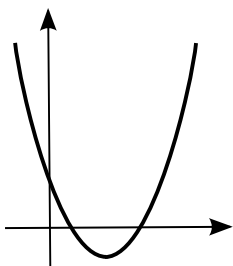


$$a > 0$$

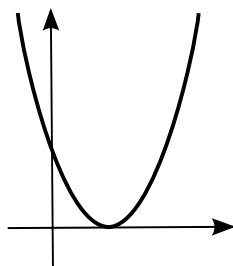


$$a < 0$$

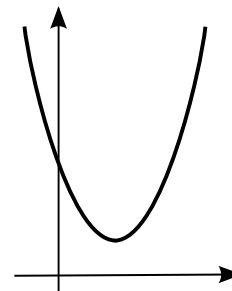
Placement. Le signe de Δ , lui, nous dit comment notre parabole se place par rapport à l'axe des abscisses :



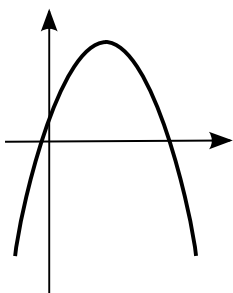
$$a > 0, \Delta > 0$$



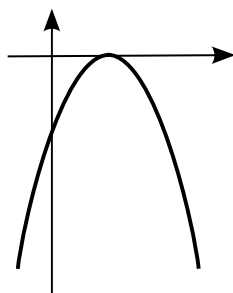
$$a > 0, \Delta = 0$$



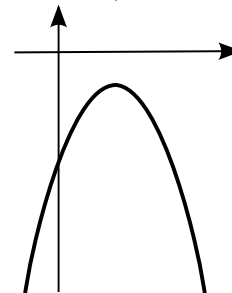
$$a > 0, \Delta < 0$$



$$a < 0, \Delta > 0$$



$$a < 0, \Delta = 0$$



$$a < 0, \Delta < 0$$

Sommet. Le sommet de la parabole (i.e. là où elle a une tangente horizontale) est le point S de coordonnées

$$S = \left(\frac{-b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a} \right).$$