Exercices de Khôlle. PSI. Ev. N.

Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. A tout n-uplet $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, on associe le polynôme $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$. Montrer que pour toute racine $z \in \mathbb{C}$ de P, on a
$$|z| \leqslant \max\left\{1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\right\}.$$
2. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ unitaires, et scindés sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{S}_n$ est fermé dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 2

1. Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Montrer que
   – soit il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $G = a\mathbb{Z}$,
   – soit G est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Application : montrer que si $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $\{e^{2i\pi n\theta},\ n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{S}^1$. (Rappel : $\mathbb{S}^1$ est le cercle unité dans le plan complexe.)

Exercice 3 Soit E un evn et soit $A \subset E$, $A \neq \emptyset$.

1. Montrer que $x \in \overline{A}$ ssi il existe une suite (x_n) de points de A qui converge vers x.
2. Montrer que A est fermé ssi toute suite d'éléments de A qui converge converge vers A.
3. Application : Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \ / \ f \text{ est bornée}\}$ muni de la norme infinie et soit $A = \{f \in E \ / \ \lim_{+\infty}(f) = 0\}$. Montrer que A est fermé dans$E$.

Exercice 4 Soit E euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que

$$\forall (x,y) \in E^2,\ < x, y >= 0 \Rightarrow < f(x), f(y) >= 0.$$

Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in E$, $||f(x)|| = k||x||$. (Ind : trouver $k \in \mathbb{R}^+$ tel que l'endomorphisme $\frac{1}{k}f$ soit orthogonal.)

Exercice 5 Soit

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R}[X]^2 & \rightarrow & \mathbb{R}[X] \\ (P,Q) & \mapsto & \int_0^\infty e^{-t}P(t)Q(t)dt \end{array}.$$

1. Montrer que Φ est un produit scalaire.
2. Déterminer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^+} e^{-t}(t^2 - at - b)^2 dt$.

Exercice 6

1. $\mathbb{Q}$ est-il ouvert, fermé dans $\mathbb{R}$? Déterminer $\overset{\circ}{\mathbb{Q}}$, $\overline{\mathbb{Q}}$.
2. Soit $E = \{1/n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$. E est-il ouvert, fermé dans $\mathbb{R}$? Déterminer $\overset{\circ}{E}$, $\overline{E}$.
3. Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (ind : montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure).

Exercice 7 Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On définit les applications N_1 et N_2 sur E par :

$$N_1(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|, \qquad N_2(f) = \int_0^1 e^t |f(t)| dt.$$

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E.
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de E définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1/n \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

   Étudier cette suite pour les N_1 et N_2. Que peut-on en conclure ?