Exercices de Khôlle. PSI. Intégration.

Exercice 1 Soient $F : t \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\,dx$ et $G : t \mapsto \left(\displaystyle\int_0^t e^{-x^2}\,dx\right)^2$.

1. Montrer que F et G sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $F' + G'$.
3. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue, T-périodique telle que $f(0) > 0$.

1. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que $\displaystyle\int_0^a f(t)\,dt > 0$.
2. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

   (On pourra considérer la primitive $F(X) = \displaystyle\int_0^X f(t)\,dt$ et étudier les suites (u_n) et (v_n) données pas $u_n = F(nT)$ et $v_n = F(a+nT)$.)

Exercice 3 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$.

1. Montrer que I_n converge pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Trouver une relation de recurrence vérifiée par la suite (I_n).
3. En déduire I_n en fonction de n.

Exercice 4 On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$.

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.
2. Exprimer I_n en fonction de n.
3. Déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 5 Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue décroissante telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ converge et encadrer le reste $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} f(k)$ à l'aide d'intégrales de f.
2. Application : Pour $\alpha > 1$, donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ quand $n \to \infty$.

Exercice 6 Soient $I = \displaystyle\int_{u=0}^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)(1+u^n)}$ et $J = \displaystyle\int_{u=0}^{+\infty} \frac{u^n\,du}{(1+u^2)(1+u^n)}$, $(n \in \mathbb{N})$.

Prouver que ces intégrales convergent, qu'elles sont égales et les calculer.

Exercice 7 Soit

$$\begin{array}{rcccl} F & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2} e^{-t} dt. \end{array}$$

Exprimer F à l'aide de fonctions usuelles. (On pourra étudier la dérivabilité de F et ses dérivées.)