Mercredi 30 mars 2005. Maple TD 10.

Exercice 1 : *Division euclidienne des polynômes.*

Construire une procédure qui prend pour arguments deux polynômes $P_1(X)$ et $P_2(X)$ et qui renvoie le quotient et le reste de la division euclidienne de P_1 par P_2. (Rq : pour plus de souplesse, il est conseillé de préciser la variable X dans les arguments...).
Tester cette procédure sur quelques polynômes.

****

Exercice 2 : *Interpolation de Lagrange*

Charger les bibliothèques *plots* et *plottools*.

1. *Interpolation d'un système de points*
   Etant donné un système $\mathcal{S} = \{(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)\}$ de points de $\mathbb{R}^2$, il existe un unique polynôme $L_{\mathcal{S}}$ de degré $n-1$ tel que :
   $$\forall i \in \{1, ...n\}, \;\; L_{\mathcal{S}}(x_i) = y_i$$
   C'est LE polynôme interpolateur de Langrange associé à l'ensemble $\mathcal{S}$. En notant $L_{\mathcal{S},i}(X) = \prod_{j \neq i} \frac{(X - x_j)}{(x_i - x_j)}$, ce polynôme $L_{\mathcal{S}}$ est alors donné par :
   $$L_{\mathcal{S}}(X) = \sum_{i=1}^{n} y_i L_{\mathcal{S},i}(X)$$
   (a) Pour $\mathcal{S} = \{(-2, 3), (-1, -1), (0, 2), (1, 1), (2, 2)\}$, donner $L_{\mathcal{S}}$ sous forme développée.
   (Rappel : les points du plans sont donnés à l'aide de listes de leurs coordonnées.)
   (b) Sur un même graphe, représenter le polynôme $L_{\mathcal{S}}$ ainsi que le système $\mathcal{S}$. (Rappel : pour représenter un système de points, utiliser la commande *point*).
   (c) Ecrire une procédure ayant pour parametres un ensemble de points $\mathcal{S} = \{(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)\}$ et le nom de la variable X, qui renvoie le polynôme interpolateur de Lagrange associé $L_{\mathcal{S}}(X)$ sous forme développée.
2. *Interpolation d'une fonction*
   Etant donnés une fonction f et n points $x_1, ..., x_n$ dans son domaine de définition, le polynôme interpolateur de Lagrange L_f associé a f est le polynôme associé au système $\mathcal{S} = \{(x_1, f(x_1)), ..., (x_n, f(x_n))\}$. (Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, on a donc $P(x_i) = f(x_i)$, et les x_i sont les points d'interpolation de f).

(a) Sur le modèle de la procédure précédente, ecrire une procédure dont les paramètres sont la fonction f, les points d'interpolation $(x_i)_{i=1..n}$ et la variable X et qui renvoie $L_f(X)$ sous forme factorisée.

(b) Soit $f: \quad x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$. Tracer f et le polynôme L_f associé aux points $-1, 0, 1, 2$ sur un même graphe.

3. *Phénomène de bords*

   On prendra successivement $n = 2, 5$ puis 10.

   (a) On reprend la fonction f définie plus haut.
   Représenter f et le polynôme L_f associé lorsque l'on découpe l'intervale $[-5, 5]$ en n intervalles de même longueur.
   Qu'observe-t-on aux bords de l'intervalle d'interpolation ?

   (b) Soient $x_k = 5 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)} \quad \in [-5, 5], \quad k = 0..n$. Représenter f et le polynôme L_f associé à cette nouvelle partition de $[-5, 5]$.

   (c) Superposer le graphe de f et les deux interpolations obtenues. Conclure. (Les points $x_k, \quad k = 0..n$ sont appelés points de Tchebychev. Ils ont été construits dans le but de supprimer les phénomènes de bords dans l'interpolation...).

* * * * * * * * * * * * *

Exercice 3 : *Racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers.*

1. Soit $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ un polynôme à coefficients entiers tel que $P(0) \neq 0$ et soit $x = p/q$ une racine rationnelle de P, donnée sous sa forme réduite. Montrer sur papier que p divise a_0 et que q divise a_n.
2. Cela nous donne une methode pour rechercher de telles racines :

   (a) Construire une procédure Maple qui prend pour argument un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ et sa variable X, qui renvoie une liste des racines rationnelles possibles de P. (Attention : il faut traiter à part le cas $P(0) = 0$...).

   (b) Construire une procédure qui prend pour argument une liste L de rationnels, un polynôme P et sa variable X, et qui ne renvoie les éléments de L qui sont racines de P.

   (c) A l'aide des deux procédures précédentes construire une procédure `sol` qui prend pour argument un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ et sa variable X, et qui renvoie la liste de ses racines rationnelles.

   (d) Tester cette procédure sur quelques polynômes. (On pourra par exemple regarder le polynôme $26X^3 - 48X^2 + 19X - 2$ dont les racines rationnelles sont $\{1/2, 2/3, 1/3\}$.)

* * * * * * * * * * * * *