Mercredi 13 avril 2005. Maple TD 11.

Exercice 1 : *Pivot de Gauss.*

Soit $(\mathcal{S})$ le système :

$$(\mathcal{S}) \quad : \quad \begin{cases} 3x+2y-z=1 \\ 2x-3y+4z=3 \\ x+y-3z=2 \end{cases}$$

Effectuer le pivot de Gauss sur ce système. En déduire les solutions de $(\mathcal{S})$. (Rq : pour rappeler le dernier résultat, utiliser le symbole %.)

* * * * * * * * * * * * *

Exercice 2 : *Etude d'une application linéaire.*

Soit $f: \ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ telle que

$$f(x,y,z,t) = (x-y-z-3t, y+3z+t, -x+y+z+3t, -3x+y+3z-2t)$$

1. Donner la matrice de $f$ dans la base canonique $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner la dimension de $\mathrm{Im}(f)$, ainsi qu'une base.
3. Donner la dimension de $\ker(f)$, ainsi qu'une base.
4. $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont-ils supplémentaires ?

* * * * * * * * * * * * *

Exercice 3 : *Diagonalisation.*

Soit $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de $A$ ainsi qu'une base de chacun de ses sous-espaces propres.
2. En déduire une matrice $P$ inversible et une matrice $D$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
3. En déduire une expression matricielle de $A^n$.

* * * * * * * * * * * * *

Exercice 4 : *L'espace vectoriel* $\mathbb{R}_6[X]$.

Pour $k = -3..3$, on note $P_k(X) = (X-k)^6$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \{P_1, ..., P_6\}$ forme une base de $\mathbb{R}_6[X]$. (On pourra décomposer les $P_k$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_6[X]$ et étudier la matice obtenue.).
2. Exprimer le polynôme $Q = (X^2+X+1)^3$ dans la base $\mathcal{B}$.

* * * * * * * * * * * * *

Exercice 4 : *Puissances d'une matrice.*

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -9 & 6 & -7 \\ -4 & 3 & -4 \\ 8 & -5 & 6 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^{50}$.
2. Soit $P = X^3 - 3X + 2$. Monter que la matrice $P(A)$ est nulle.
3. Construire une procédure d'argument $n$ qui renvoie le reste de la division euclidienne de $X^n$ par $P$. (On pourra utiliser la commande `rem`...).
4. En déduire une procédure d'argument $n$, qui renvoie la matrice $A^n$. Retrouver le resultat de la première question.