Mercredi 8 juin 2005. Maple TD 13.

Exercice 1 : *L'espace euclidien* $\mathbb{R}_3[X]$.

On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $<,>$ où :

$$\forall (P,Q) \in E^2, \ < P, Q >= \int_0^1 P(x)Q(x)dx$$

et l'on note $B = \{1, X, X^2, X^3\}$.

1. Créer une procédure PS d'arguments (P, Q, X) qui renvoie $< P(X), Q(X) >$.
2. Transformer B en une BON de E pour le produit scalaire $<,>$.
3. On note $F = \mathbb{R}_2[X] \subset E$. Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur F.
4. En déduire
$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^1 (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 dx$$

* * * * * * * * * * * * *

Exercice 2 : *Etude d'une matrice orthogonale.*

Soit
$$A := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que A est une matrice orthogonale.
2. Calculer le déterminant de A. En déduire la nature de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ associé à A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer les caractéristiques de f.
4. Déterminer une base B de $\mathbb{R}^3$ tel que
$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
où $\theta \in [0, 2\pi]$.

* * * * * * * * * * * * *

Exercice 3 : *Exponentielle de matrice.*

Soient $M := \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont M est la matrice dans la base canonique $B = (i, j, k)$ de $\mathbb{R}^3$.
(Rappel : pour toute matrice M, on note e^M la matrice $\sum_{n\geq 0} \frac{M^n}{n!}$)

1. On note $e_1 := 3(i + j + k)$, $e_2 := -3i - 4j - 3k$, $e_3 := -2i - 3j - 3k$. Montrer que $B' := (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice M' de f dans B'.
3. Déterminer une matrice D diagonale et une matrice N nilpotente telles que $M' = N + D$ et $ND = DN$.
4. En déduire une expression matricielle de $e^{M'}$ puis de e^M.

* * * * * * * * * * * * *