Intégration. Décembre 2007.

Exercice 1 Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue, positive et décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge et que sa limite ℓ vérifie $\ell \in [0, f(1)]$.
2. Applications :
   (a) Montrer qu'il existe une constante $\gamma \in [0,1]$ telle que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.
   (b) Montrer qu'il existe une constante $\alpha \in [1,2]$ telle que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} - \alpha + o(1)$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ bijective, dérivable, strictement croissante et telle de que $f(0) = 0$.

1. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}^+$, on a
$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{f(a)} f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = af(a).$$
2. Montrer que, pour tous $(a,b) \in (\mathbb{R}^+)^2$,
$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{b} f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x \geq ab.$$

Exercice 3 Soient f et g deux fonctions continues, $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que
$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Montrer que $f = g = 0$.

Exercice 4 Calculer, pour tout $a > 0$ l'intégrale
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)\,\mathrm{d}x}{\sin^2(x) + a\cos^2(x)}$$

Exercice 5 Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $x \in [a,b]$, on ait $f(a+b-x) = f(x)$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 6 Soit $a > 0$. Calculer

$$\int_{1/a}^a \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 7 Calculer

$$I_n = \int_1^x (\ln t)^n\,\mathrm{d}t$$

en fonction de n et x.

Exercice 8 Soient $F : t \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\,dx$ et $G : t \mapsto \left(\displaystyle\int_0^t e^{-x^2}\,dx\right)^2$.

1. Montrer que F et G sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $F' + G'$.
3. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

Exercice 9 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue, T-périodique telle que $f(0) > 0$.

1. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que $\displaystyle\int_0^a f(t)\,dt > 0$.
2. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

   (On pourra considérer la primitive $F(X) = \displaystyle\int_0^X f(t)\,dt$ et étudier les suites (u_n) et (v_n) données pas $u_n = F(nT)$ et $v_n = F(a + nT)$.)

Exercice 10 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$.

1. Montrer que I_n converge pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Trouver une relation de recurrence vérifiée par la suite (I_n).
3. En déduire I_n en fonction de n.

Exercice 11 (Théorème de la moyenne généralisé.)
Soient $f, g \in \mathcal{C}([a,b])$ telles que $g > 0$ sur $]a,b[$.
Montrer qu'il existe $\xi \in]a,b[$ tel que :

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$$

(Indication : étudier $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ pour justifier le changement de variable $u(x) = a + (b-a)G(x)/G(b)$.)

Exercice 12 Soit $x \in [0,n]$.

1. Montrer que $(1 - x/n)^n \le e^{-x}$.
2. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{x=0}^n (1 - x/n)^n\,dx$.

Exercice 13 On pose $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n t \, dt$.

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.
2. Calculer I_n en fonction de n.
3. Que peut-on en déduire ?

Exercice 14 On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx$.

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.
2. Exprimer I_n en fonction de n.
3. Déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 15 Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue décroissante telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ converge et encadrer le reste $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} f(k)$ à l'aide d'intégrales de f.
2. Application : Pour $\alpha > 1$, donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ quand $n \to \infty$.

Exercice 16 Soient $I = \displaystyle\int_{u=0}^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)(1+u^n)}$ et $J = \displaystyle\int_{u=0}^{+\infty} \frac{u^n\, du}{(1+u^2)(1+u^n)}$, $(n \in \mathbb{N})$.

Prouver que ces intégrales convergent, qu'elles sont égales et les calculer.

Exercice 17 Soit
$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2} e^{-t} dt. \end{array}$$

Exprimer F à l'aide de fonctions usuelles. (On pourra étudier la dérivabilité de F et ses dérivées.)