Oraux blancs. PSI. Mai 2007.

Exercice 1 Pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on note

$$N(x,y) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \frac{x+ty}{1+t+t^2} \right|.$$

Montrer que N définit une norme sur $\mathbb{R}^2$ et tracer la boule unité

$$B_N(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; N(x,y) \leqslant 1\}.$$

****

Exercice 2 Soit (u_n) la suite définie par

$$u_n = \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n}, \qquad a,b>0.$$

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ en fonction des valeurs de a et b.

Exercice 3 Soit E un espace vectoriel.

1. Soit $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille d'ouverts de E.
   (a) Montrer que $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k$ est encore un ouvert.
   (b) Montrer que quelque soit la famille d'indices $k_1,\ldots,k_s$, l'union $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{s} U_{k_i}$ est encore un ouvert.
2. Soit $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de fermés de E.
   (a) Montrer que $\displaystyle\bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k$ est encore un fermé.
   (b) Montrer que quelque soit la famille d'indices $k_1,\ldots,k_s$, l'union $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{s} F_{k_i}$ est encore un fermé.

****

Exercice 4 Calculer, pour tout $a>0$ l'intégrale

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)\mathrm{d}x}{\sin^2(x) + a\cos^2(x)}$$

Exercice 5 On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, et l'on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 2y - 3z = 0$.

1. Déterminer une base orthonormée de $\mathcal{P}$.
2. Déterminer le projeté orthogonal de e_3 sur $\mathcal{P}$.

****

Exercice 6 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$P_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x - 1.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Dresser le tableau de variation de la fonction P_n.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n admet une unique racine u_n positive.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P_n(u_{n+1}) < 0.$$

4. En déduire le sens de variation de la suite (u_n), puis sa nature.
5. Montrer que la suite (u_n^n) tend vers 0 quand $n \to +\infty$.
6. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 7 1. Montrer que la matrice suivante est la matrice d'une isométrie de $\mathbb{R}^2$.

$$A = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer l'isométrie associée à A via la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

****

Exercice 8 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé. On définit sur $[0,1]$ la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$\forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = \begin{cases} n^\alpha x(1-nx) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

1. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f à déterminer.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α pour que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

4. Commenter.

Exercice 9 Soient a, b, c trois réels. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Pour quelles valeurs des paramètres a, b, c la matrice M est-elle diagonalisable ?

****

Exercice 10 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{4n^2 - 1}$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geqslant 1} f_n(x)$. La série converge-t-elle pour $x = R$, $x = -R$
2. Montrer que
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad |x| < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = -x \arctan x$$
3. En déduire la somme $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Exercice 11 Soit $E = (\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}), ||.||_\infty)$. On considère une suite (f_n) d'éléments de E qui converge (pour la norme $||.||_\infty$) et l'on note f sa limite. On considère également une suite (x_n) d'éléments de $[0,1]$ qui converge,et l'on note x sa limite.

1. Montrer que $f \in E$ et $x \in [0,1]$.
2. Montrer que la suite numérique $(f_n(x_n))$ converge vers $f(x)$.
3. Montrer que ce résultat est faux s'il n'y a pas convergence uniforme. On pourra par exemple utiliser la suite (f_n), définie par
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) = \begin{cases} 1 - x/n \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1/n \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

****

Exercice 12 Écrire la matrice de la symétrie de $\mathbb{R}^2$ d'axe la droite d'équation $ax + by = 0$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (On rappelle que la symétrie σ_D d'axe D vaut $2\pi_D - id$ où π_D est la projection orthogonale sur D).
