Oraux blancs. PSI. Juin 2008.

Exercice 1 Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on note

$$N(x, y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{x + ty}{1 + t + t^2} \right|.$$

Montrer que N définit une norme sur $\mathbb{R}^2$ et tracer la boule unité

$$B_N(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, N(x, y) \leqslant 1\}.$$

****

Exercice 2 On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to \infty} I_n = 0$.
2. Exprimer I_n en fonction de n.
3. Déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 3 Écrire la matrice de la symétrie de $\mathbb{R}^2$ d'axe la droite d'équation $ax + by = 0$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (On rappelle que la symétrie σ_D d'axe D vaut $2\pi_D - id$ où π_D est la projection orthogonale sur D).

****

Exercice 4 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n n!}.$$

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \log\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = n\left(\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

2. En déduire que la série $\sum \log\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ puis que la suite $(\log(u_n))$ convergent.
3. En déduire qu'il existe un réel $a > 0$ tel que

$$n! \underset{+\infty}{\sim} a\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Remarque : à l'aide d'une suite d'intégrales, dites intégrales de Wallis, il est possible de montrer que $a = \sqrt{2\pi}$. On obtient alors la formule de Stirling, qui nous donne un équivalent du factoriel.

Exercice 5 On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, et l'on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 2y - 3z = 0$.

1. Déterminer une base orthonormée de $\mathcal{P}$.
2. Déterminer le projeté orthogonal de e_3 sur $\mathcal{P}$.

****

Exercice 6 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue, T-périodique telle que $f(0) > 0$.

1. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que $\displaystyle\int_0^a f(t)\,dt > 0$.
2. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

   (On pourra considérer la primitive $F(X) = \displaystyle\int_0^X f(t)\,dt$ et étudier les suites (u_n) et (v_n) données pas $u_n = F(nT)$ et $v_n = F(a + nT)$.)

Exercice 7 Soient a, b, c trois réels. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Pour quelles valeurs des paramètres a, b, c la matrice M est-elle diagonalisable ?

****

Exercice 8 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{4n^2 - 1}$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$. La série converge-t-elle pour $x = R$, $x = -R$
2. Montrer que
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad |x| < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = -x \arctan x$$
3. En déduire la somme $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Exercice 9 Soit E un espace vectoriel.

1. Soit $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille d'ouverts de E.
   (a) Montrer que $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k$ est encore un ouvert.
   (b) Montrer que quelque soit la famille d'indices $k_1,\dots,k_s$, l'union $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{s} U_{k_i}$ est encore un ouvert.
2. Soit $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de fermés de E.
   (a) Montrer que $\displaystyle\bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k$ est encore un fermé.
   (b) Montrer que quelque soit la famille d'indices $k_1,\dots,k_s$, l'union $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{s} F_{k_i}$ est encore un fermé.

****

Exercice 10 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note

$$u_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^2}.$$

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout n$\in \mathbb{N}$, étudier la fonction u_n sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que pour tout $a > 0$, la série $\sum u_n$ converge normalement sur $]-\infty,-a,]\cup[a,+\infty[$.
4. A-t-on convergence normale sur $\mathbb{R}$?

Exercice 11 Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = x^n \log(\cos(x)).$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$. On notera f sa limite.
2. À-t-on convergence uniforme sur $[0,1]$?
3. Montrer que pour tout $a \in]0,1[$, la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,1]$.
4. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^a f_n(t)\,dt$.
5. Montrer que

$$\int_0^1 f_n(t)\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

****

Exercice 12 Soit

$$M = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que M est la matrice d'une isométrie.
2. Déterminer la nature de cette isométrie et donner ses sous espaces caractéristiques.

Exercice 13 1. Montrer que la matrice suivante est la matrice d'une isométrie de $\mathbb{R}^2$.

$$B = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer l'isométrie associée à A via la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

****

Exercice 14 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/n \\ -n^2(x-2/n) & \text{si} \quad 1/n \leqslant x \leqslant 2/n \\ 0 & \text{si} \quad 2/n \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f_n pour quelques valeurs de n.
2. La suite (f_n) converge-t-elle simplement sur $[0,1]$? Si oui, quelle est sa limite f ?
3. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément vers f sur $[0,1]$?

Exercice 15 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

****

Exercice 16 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$P_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x - 1.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n admet une unique racine u_n positive.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P_n(u_{n+1}) < 0.$$

3. En déduire le sens de variation de la suite (u_n), puis sa nature.
4. Montrer que la suite (u_n^n) tend vers 0 quand $n \to +\infty$.
5. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 17 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé. On définit sur $[0,1]$ la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$\forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = \begin{cases} n^\alpha x(1-nx) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

1. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f à déterminer.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α pour que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \;=\; \int_0^1 f(x)\,dx.$$

4. Commenter.

****

Exercice 18

1. Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Montrer que
   – soit il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $G = a\mathbb{Z}$,
   – soit G est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Application : montrer que si $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $\{e^{2i\pi n\theta},\, n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{S}^1$. (Rappel : $\mathbb{S}^1$ est le cercle unité dans le plan complexe.)

Exercice 19 1. Montrer que la matrice suivante est la matrice d'une isométrie de $\mathbb{R}^2$.

$$A = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer l'isométrie associée à A via la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

****

Exercice 20

1. Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Montrer que
   – soit il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $G = a\mathbb{Z}$,
   – soit G est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Application : montrer que si $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $\{e^{2i\pi n\theta},\, n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{S}^1$. (Rappel : $\mathbb{S}^1$ est le cercle unité dans le plan complexe.)

Exercice 21 On considère le problème différentiel suivant :

$$(S) : \begin{cases} (E) & : xy'' + 2y' + xy = 0 \\ (CI) & : y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe une unique solution de (S) développable en série entière autour de 0. (On pourra chercher y sous la forme $y(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$, et déterminer des conditions sur la suite (a_n).
2. Quel est l'intervalle de définition de y ?
3. Calculer y.

****

Exercice 22 On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne usuelle. Soit $\mathcal{P}$ le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2x - 2y + z = 0$.

1. Déterminer une BON $\{u_1, u_2\}$ de $\mathcal{P}$ et un vecteur normé $\{u_3\}$ de $\mathcal{P}^\perp$.
2. On pose $v = (4, -1, -1)$. Déterminer le projeté orthogonal $\pi_{\mathcal{P}}(v)$ de v sur $\mathcal{P}$.
3. Donner la matrice de la projection $\pi_{\mathcal{P}}$ dans la base $\mathcal{B}$ puis dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 23 Soit y la solution du problème de Cauchy suivant.

$$\begin{cases} y'' + x\, y' + y = 0, \\ y(0) = 0,\, y'(0) = 1. \end{cases}$$

1. Montrer que les dérivées successives de y vérifient
$$y^{(n)} + x\, y^{(n-1)} + (n-1)\, y^{(n-2)} = 0, \quad \forall n \geqslant 2.$$
2. Calculer par récurrence les dérivées successives de y en zéro.
3. En déduire le développement limité de y à l'ordre 8 en $x = 0$.

****

Exercice 24 Soit

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R}[X]^2 & \to & \mathbb{R}[X] \\ (P, Q) & \mapsto & \int_0^\infty e^{-t} P(t) Q(t) dt \end{array}.$$

1. Montrer que Φ est un produit scalaire.
2. Déterminer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^+} e^{-t} (t^2 - at - b)^2 dt$.

Exercice 25 On note $(\star)$ l'équation différentielle suivante.

$$y'' + \frac{2y'}{\operatorname{th} x} + y = 0.$$

1. On pose $z(x) = y'(x) + \dfrac{y(x)}{\operatorname{th} x}$. Écrire l'équation différentielle (d'ordre 1) sur z déduite de $(\star)$.
2. Résoudre sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ l'équation en z, puis $(\star)$.
3. Parmi les solutions trouvées, quelles sont celles prolongeables en 0 ?

****

Exercice 26 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est diagonalisable, et la diagonaliser.