

## Oraux blancs III. PSI. Mai 2007.

---

**Exercice 1** Pour tout couple  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on note

$$N(x, y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{x + ty}{1 + t + t^2} \right|.$$

Montrer que  $N$  définit une norme sur  $\mathbb{R}^2$  et tracer la boule unité

$$B_N(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / N(x, y) \leq 1\}.$$

\*\*\*\*\*

**Exercice 2** On pose  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ .

1. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ .
  2. Exprimer  $I_n$  en fonction de  $n$ .
  3. Déterminer  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ .
- 
- 

**Exercice 3** Écrire la matrice de la symétrie de  $\mathbb{R}^2$  d'axe la droite d'équation  $ax + by = 0$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  (On rappelle que la symétrie  $\sigma_D$  d'axe  $D$  vaut  $2\pi_D - id$  où  $\pi_D$  est la projection orthogonale sur  $D$ ).

\*\*\*\*\*

**Exercice 4** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par

$$u_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n n!}.$$

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \log \left( \frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = n \left( \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{2} \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right).$$

2. En déduire que la série  $\sum \log \left( \frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$  puis que la suite  $(\log(u_n))$  convergent.
3. En déduire qu'il existe un réel  $a > 0$  tel que

$$n! \underset{+\infty}{\sim} a\sqrt{n} \left( \frac{n}{e} \right)^n.$$

*Remarque : à l'aide d'une suite d'intégrales, dites intégrales de Wallis, il est possible de montrer que  $a = \sqrt{2\pi}$ . On obtient alors la formule de Stirling, qui nous donne un équivalent du factoriel.*

---

---

**Exercice 5** Soit

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{R}[X]^2 &\rightarrow \mathbb{R}[X] \\ (P, Q) &\mapsto \int_0^\infty e^{-t} P(t) Q(t) dt\end{aligned}$$

1. Montrer que  $\Phi$  est un produit scalaire.
2. Déterminer  $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^+} e^{-t} (t^2 - at - b)^2 dt$ .

\*\*\*\*\*

**Exercice 6** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , continue,  $T$ -périodique telle que  $f(0) > 0$ .

1. Montrer qu'il existe  $a > 0$  tel que  $\int_0^a f(t) dt > 0$ .

2. En déduire que  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  diverge.

(On pourra considérer la primitive  $F(X) = \int_0^X f(t) dt$  et étudier les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  données par  $u_n = F(nT)$  et  $v_n = F(a + nT)$ .)

---

---

**Exercice 7** Soient  $a, b, c$  trois réels. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Pour quelles valeurs des paramètres  $a, b, c$  la matrice  $M$  est-elle diagonalisable ?

\*\*\*\*\*

**Exercice 8** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{4n^2 - 1}$$

1. Déterminer le rayon de convergence  $R$  de la série entière  $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ . La série converge-t-elle pour  $x = R$ ,  $x = -R$  ?
2. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = -x \arctan x$$

3. En déduire la somme  $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ .
-

---

**Exercice 9** Soit  $E$  un espace vectoriel.

1. Soit  $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une famille d'ouverts de  $E$ .

(a) Montrer que  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k$  est encore un ouvert.

(b) Montrer que quelque soit la famille d'indices  $k_1, \dots, k_s$ , l'union  $\bigcap_{i=1}^s U_{k_i}$  est encore un ouvert.

2. Soit  $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une famille de fermés de  $E$ .

(a) Montrer que  $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k$  est encore un fermé.

(b) Montrer que quelque soit la famille d'indices  $k_1, \dots, k_s$ , l'union  $\bigcup_{i=1}^s F_{k_i}$  est encore un fermé.

\*\*\*\*\*

**Exercice 10** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on note

$$u_n(x) = \frac{nx}{1 + n^3 x^2}.$$

1. Montrer que la série  $\sum u_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$ .

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , étudier la fonction  $u_n$  sur  $\mathbb{R}$ .

3. En déduire que pour tout  $a > 0$ , la série  $\sum u_n$  converge normalement sur  $] -\infty, -a, ] \cup [a, +\infty[$ .

4. A-t-on convergence normale sur  $\mathbb{R}$  ?

---

**Exercice 11** Soit  $(f_n)$  la suite de fonctions définie sur  $[0, 1]$  par

$$f_n(x) = x^n \log(\cos(x)).$$

1. Montrer que la suite  $(f_n)$  converge simplement sur  $[0, 1]$ . On notera  $f$  sa limite.

2. À-t-on convergence uniforme sur  $[0, 1]$  ?

3. Montrer que pour tout  $a \in ]0, 1[$ , la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, 1]$ .

4. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^a f_n(t) dt$ .

5. Montrer que

$$\int_0^1 f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

\*\*\*\*\*

**Exercice 12** Soit

$$M = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que  $M$  est la matrice d'une isométrie.

2. Déterminer la nature de cette isométrie et donner ses sous espaces caractéristiques.

---

---

**Exercice 13** 1. Montrer que la matrice suivante est la matrice d'une isométrie de  $\mathbb{R}^2$ .

$$B = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer l'isométrie associée à  $A$  via la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

\*\*\*\*\*

**Exercice 14** Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite de fonctions définies sur  $[0, 1]$  par

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n \\ -n^2(x - 2/n) & \text{si } 1/n \leq x \leq 2/n \\ 0 & \text{si } 2/n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de  $f_n$  pour quelques valeurs de  $n$ .
2. La suite  $(f_n)$  converge-t-elle simplement sur  $[0, 1]$ ? Si oui, quelle est sa limite  $f$ ?
3. La suite  $(f_n)$  converge-t-elle uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ ?

---

---

**Exercice 15** Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que  $A$  est diagonalisable.
2. Calculer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

\*\*\*\*\*

**Exercice 16** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $P_n$  la fonction polynomiale définie sur  $\mathbb{R}^+$  par

$$P_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1.$$

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P_n$  admet une unique racine  $u_n$  positive.
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$P_n(u_{n+1}) < 0.$$

3. En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)$ , puis sa nature.
  4. Montrer que la suite  $(u_n^n)$  tend vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ .
  5. En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .
-

---

**Exercice 17** 1. Montrer que la matrice suivante est la matrice d'une isométrie de  $\mathbb{R}^2$ .

$$A = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer l'isométrie associée à  $A$  via la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

\*\*\*\*\*

**Exercice 18** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  fixé. On définit sur  $[0, 1]$  la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  par

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) = \begin{cases} n^\alpha x(1 - nx) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que  $(f_n)$  converge simplement vers une fonction  $f$  à déterminer.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $\alpha$  pour que la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ .
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $\alpha$  pour que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

4. Commenter.
- 
- 

**Exercice 19** Soient  $a$  et  $b$  deux réels positifs. Déterminer en fonction de  $a$  et  $b$  la nature de la série de terme général

$$5^{\sqrt{n}} \frac{a^n}{b^n + 5^{\sqrt{n}}}.$$

\*\*\*\*\*

**Exercice 20** On munit  $\mathbb{R}^3$  de sa structure euclidienne usuelle. Soit  $\mathcal{P}$  le plan de  $\mathbb{R}^3$  d'équation  $2x - 2y + z = 0$ .

1. Déterminer une BON  $\{e_1, e_2\}$  de  $\mathcal{P}$  et un vecteur normé  $\{e_3\}$  de  $\mathcal{P}^\perp$ . (On pourra considérer la base  $\{(1, 2, 2), (1, 1, 0)\}$  de  $\mathcal{P}$ .) On obtient ainsi une BON  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$ .
  2. On pose  $u = (4, -1, -1)$ . Déterminer le projeté orthogonal  $\Pi_{\mathcal{P}}(u)$  de  $u$  sur  $\mathcal{P}$ , ainsi que l'angle entre  $u$  et  $\Pi_{\mathcal{P}}(u)$ .
  3. Pour tout vecteur  $X \in \mathbb{R}^3$ , exprimer  $\Pi_{\mathcal{P}}(X)$  en fonction des coordonnées de  $X$  dans la base  $\{e_1, e_2, e_3\}$ .
  4. Donner la matrice de la projection  $\Pi_{\mathcal{P}}$  dans la base  $\mathcal{B}$  puis dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .
-