Séries entières. PSI. Janvier 2008.

Exercice 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{4n^2 - 1}$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geqslant 1} f_n(x)$. La série converge-t-elle pour $x = R$, $x = -R$
2. Montrer que
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad |x| < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = -x \arctan x$$
3. En déduire la somme $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Exercice 2 Donner le rayon de convergence de chacune des séries suivantes, puis en s'aidant des DSE des fonctions classiques, donner les fonctions sommes correspondantes :

$$a) \sum_{n \geqslant 1} (-1)^n \frac{x^{4n-1}}{4n}, \quad b) \sum_{n \geqslant 0} \frac{n^2 + n + 1}{n!} x^n.$$

Exercice 3 Soit $f(x) = \dfrac{5x^3 - 2x^2 + x}{(1-2x)(1-3x)(1-x)^2}$.

1. Déterminer les réels a, b, c et d tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{1/3, 1/2, 1\}$, on ait
$$f(x) = \frac{a}{1-3x} + \frac{b}{1-2x} + \frac{c}{1-x} + \frac{d}{(1-x)^2}.$$
2. En déduire le développement en séries entières de f au voisinage de 0. On précisera le rayon de convergence de la série obtenue, ainsi que le domaine de validité de ce développement.

Exercice 4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ et l'on note f la somme $\sum f_n$.

1. Calculer le rayon de convergence de la série $\sum f_n$.
2. Montrer que f est continue sur $[-R, R]$ et dérivable sur $]-R, R[$.
3. Donner une expression simple de f' puis de f sur $]-R, R[$.
4. En déduire l'égalité

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} = 2\log 2 - 1.$$

Exercice 5 Pour tout $x \neq 1$, on note $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$.

1. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.
   On note $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ce développement et R son rayon de convergence.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.
3. Montrer que $R = 1$ et que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_n x^n.$$

Exercice 6 Soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n^2-1} x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de S.
2. Exprimer $S(x)$ à l'aide des fonctions usuelles. (On pourra décomposer $\dfrac{n}{n^2-1}$ en éléments simples et se ramener au DSE classiques).
3. La série converge-t-elle pour $x = \pm R$?

Exercice 7 On considère la série entiere $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ où $f_n(x) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^{n+1}$. (On notera f sa somme).

1. Calculer son rayon de convergence.
2. Etablir l'égalité
$$\frac{2}{n+1}\binom{2n}{n} = 4\binom{2n}{n} - \binom{2n+2}{n+1}.$$
En déduire une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par f.
3. Résoudre cette équation pour obtenir une expression de $f(x)$ à l'interieur de l'intervalle de convergence.

Exercice 8 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = a_2 = 1 \\ a_{n+1} = a_n - \dfrac{a_{n-2}}{2(n+1)} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (a_n) est décroissante et que la suite (na_n) est croissante.
2. En déduire le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$.
3. Soit f la somme de la série entière $\sum a_n x^n$. Montrer que f est solution d'un équation différentielle à déterminer.
4. En déduire une expression de f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 9

1. On considère le problème différentiel suivant :
$$(S)\ :\ \begin{cases} (E) & :\ xy'' + 2y' + xy = 0 \\ (CI) & :\ y(0) = 1 \end{cases}$$
   (a) Montrer qu'il existe une unique solution de (S) développable en série entière autour de 0. (On pourra chercher y sous la forme $y(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, et déterminer des conditions sur la suite (a_n).
   (b) Quel est l'intervalle de définition de y ?
   (c) Calculer y.
2. Mêmes questions avec le système
$$(S')\ :\ \begin{cases} x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1 \\ y(0) = 1/2,\ \ y'(0) = 0 \end{cases}$$